Intrinsic London Superconductorの磁気的性質

真木, 和美; 都築, 俊夫

Intrinsic London Superconductor の 磁気的性質

真木和美（京大数理研）
都築俊夫（京大理）

（10月22日受理）

1　Ginzburg-Landau (GL) により導入された、negative surface energy の概念[1]は、いわゆるLandau 型超電導体の異常な磁気的性質を説明する上で、非常に有効であるように思われる。実際、Abrikosov[2]は、GL方程式をくわしく解析することによつて、混合状態の存在を示した。

しかしながら、GL方程式は、転移温度のすぐ近くでしか成立しないので、Abrikosov の picture が、より低温においても有効であるかどうか調べることは、意味があると思う。

以前に、Maki[3]は、電子のmean free pathが非常に短い超電導合金では、Abrikosov の理論は温度に無関係に、全く一般的に成立することを示した。

この論文では、intrinric London superconductor（電子のmean free path は無限大）の場合について、混合状態の磁気的性質を調べる。このような超電導体は自然界にはあまり存在せず（例．Nb，V）むしろ理想的な場合であるけれど、合金の結果と合せ考えるとき、London型超電導体の一般的性質が明らかになると期待される。

この問題に必要な基礎方程式は、Gor'kov によりすでに得られているので、それらを変分法により解くと言うことになる。

subcritical region でのAbrikosov の混合状態は、2つのパラメータ $\kappa_1(T)$ と $\kappa_2(T)$ を用いて完全に記述されることが分る。ここで $\kappa_1(T)$，$\kappa_2(T)$ は、次の様に定義されます。

$$\kappa_1(T) = H_{C2}(T)/\sqrt{2}\,H_C(T),$$

$$-4\pi \frac{\partial M}{\partial H}\Big|_{H=H_{C2}(T)} = [\{2\kappa_2^2(T)-1\}\beta]^{-1}.$$

κ_1 と κ_2 を実際に計算すれば、関係 $\kappa_2(T) \geq \kappa_1(T) \geq \kappa$ が成立しており、絶対

零度の近くで、$\kappa_2(T)$ は $[\ell n\, T_{C0}/T]^{1/2}$ のように発散することが分る。

2　始めに、Gor'kov によつて得られた結果（$H_{C2}(T)$ の計算）を復習しておこう。[4] 磁場が十分強い場合には、秩序パラメータ $\Delta(r)$ は小さい（$\Delta/\pi T_{C0} \ll 1$）ので一般化されたGor'kov 方程式を Δ の巾級数にとくと[5]

$$\Delta^+(r) = g T \sum_n \int G_\omega(r', r)\, G_{-\omega}(r', r)\, \Delta^+(r')\, d^3r'$$
$$- g T \sum_n \iiint G_\omega(s, r)\, G_{-\omega}(s, \ell)\, G_\omega(m, \ell)\, G_{-\omega}(m, r)$$
$$\times\ \Delta^+(s)\, \Delta(\ell)\, \Delta^+(m)\, d^3s\, d^3\ell\, d^3m\,, \tag{1}$$

となる。ここで $\omega = \pi T(2n+1)$，$\Delta^+(r) = \langle T\psi^+_\uparrow(r,t)\,\psi^+_\downarrow(r,t)\rangle$. Δ について5次以上の項は無視した。

$$G_\omega(r, r') = e^{i\varphi(r,r')}\, G^0_\omega(r, r')$$

$$\varphi(r, r') = \int_{r'}^{r'} \vec{A}(\ell)\cdot d\vec{\ell}$$

は磁場中での正常金属中の電子のグリーン関数である。$\vec{A}(r)$ はベクトルポテンシャル。

一方、電流密度は

$$j(r) = \frac{ie}{m}(\nabla_r - \nabla_{r'})\, T \sum_n \iint G_\omega(r', s)\, G_\omega(\ell, s)\, G_{-\omega}(\ell, s)$$
$$\times\ \Delta^+(\ell)\, \Delta(s)\, d^3\ell\, d^3s\, \Big|_{r'=r} \tag{2}$$

で与えられる。

方程式(1)，(2)を一般化されたG－L方程式と呼んでもよい。

混合状態について話をする前に、upper critical field $H_{C2}(T)$の計算をGor'kov に従つてやつておこう。よく知られているように、upper critical field $H_{C2}(T)$ は、それ以下の強さでは正常状態が不安定になる　そのような磁場の強さの限界値であり、方程式(1)の線型部分から決められている。

磁場がz方向を向いていて、その強さがHであるとすると、面倒な計算の結果線型部分は

$$\Delta(\xi)\,\ell n\left(\frac{e\gamma\,\Delta_{00}\,\delta}{v\sqrt{eH}}\right)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}K_T(\xi,\xi')\,\Delta(\xi')\,d\xi', \tag{3}$$

$$K_T(\xi,\xi')=\frac{2\pi T}{v}\int_1^{\infty}\frac{J_0[(\xi^2-\xi'^2)\sqrt{u^2-1}]\,du}{u\sinh\left(\frac{2\pi Tu}{v\sqrt{eH}}|\xi-\xi'|\right)}\,\theta(|\xi-\xi'|-\delta) \tag{4}$$

となる。ここで J_0 は0次のベッセル関数，$\theta(x)$ は階段関数である。又 $\xi=\sqrt{eH}\,x$, $\ell n\,\gamma=C$ は Euler の定数である。

方程式(3)は変分関数 $\Delta(\xi)=e^{-\xi^2}$ を用いて解かれ、H_{C_2} を決める方程式は、

$$\ell n\frac{T}{T_{C0}}+f_0(\rho)=0 \tag{5}$$

となる。ここで

$$f_0(\rho)=\int_0^{\infty}d\zeta\int_1^{\infty}\frac{du}{u}\cdot\frac{1-J_0(\rho\xi^2\sqrt{u^2-1})\,e^{-\rho\xi^2}}{\sinh(\zeta u)} \tag{6}$$

$$\rho=\frac{v^2 e H_{C2}}{(2\pi T)^2}$$

$f_0(\rho)$ の漸近形は

$$f_0(\rho)=\frac{7\zeta(3)}{6}\rho-\frac{31}{10}\zeta(5)\rho^2+\frac{381}{28}\zeta(7)\rho^3-\frac{511}{6}\zeta(9)\rho^4+\cdots$$

$$\text{for } \rho\ll 1 \tag{7}$$

$$=\ell n(2e\sqrt{2\gamma\rho})+\frac{1}{\pi^2}\left\{\zeta'(2)+\frac{\zeta(2)}{2}\ell n\left(\frac{2}{\pi^2\gamma\rho}\right)\right\}\frac{1}{\rho}$$

$$\text{for } \rho\gg 1 \tag{8}$$

となり、従つて upper critical field $H_{C2}(T)$ は

$$H_{C2}(T)=\frac{1}{e v^2}\left(\frac{\gamma\Delta_{00}^2 e^2}{2}\right)\left[1-\frac{8\gamma}{\pi^2 e^2}\left\{\zeta'(2)+\zeta(2)\,\ell n\left(2e\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{T}{T_{C0}}\right)\right\}\times\left(\frac{T}{T_{C0}}\right)^2\right]$$

$$\text{for } T\ll T_{C0} \tag{9}$$

$$= \frac{6}{7\zeta(3)} \cdot \frac{(2\pi T_{C0})^2}{e\ v^2}\ \theta\ [1 + \{\frac{31}{5}\zeta(5)(\frac{6}{7\zeta(3)})^2 - \frac{3}{2}\}\ \theta]$$

$$\text{for } \theta = \frac{T_{C0} - T}{T_{C0}} \ll 1 \quad (10)$$

$\kappa_1(T)$ を $\kappa_1(T) = H_{C2}(T) / \sqrt{2} H_C(T)$ で定義すると

$$\kappa_1(T) = 1.25\,\kappa\ [1 + 0.65(\frac{T}{T_{C0}})^2 \ell n(\text{const.}\frac{T}{T_{C0}})]$$

$$\text{for } T/T_{C0} \ll 1 \quad (11)$$

$$= \kappa\ (1 + 0.41\ \theta) \qquad \text{for } \theta \ll 1 \quad (12)$$

となる。ここで

$$\kappa = \frac{3\pi m T_{C0}}{e} (2\pi / 7\zeta(3)\ m^4 v^5)^{1/2} \quad (13)$$

である。

以上の結果にもとずいて、Gor'kov は次の様な interpolation formula を与えた。

$$\sqrt{2}\ \kappa_1(T) = \kappa[1.77 - 0.43(\frac{T}{T_{C0}})^2 + 0.07(\frac{T}{T_{C0}})^4] \quad (14)$$

実験データの解析は、この公式によつている。

3　ここでは、Abrikosov の混合状態を調べよう。磁場の強さが H_{C2} より少し小さくなつたとき、秩序パラメータはやはり小さいので次の仮定のもとに、方程式(1)，(2)の解を調べてもよいであろう。即ち、$\Delta(r)$の関数形は

$$\Delta(x, y) = \sum_n C_n \psi_n(x, y) \quad (15)$$

$$\psi_n(x, y) = e^{ikny - eH(x - \frac{kn}{2eH})^2} \quad (16)$$

と取る。ここでnは整数，C_n，kは任意常数である。（C_n，kは自由エネルギーを極小にするように後に決める）[1),6)]

(15) ,(16)を(2)に代入すると

$$j_i(x,y)=\frac{eN}{m(2\pi T)^2}\sum_{nm} C_n\psi_n C_m^+\psi_m^+ I_i\left(x+\frac{k(n+m)}{4eH},\ \frac{k(n-m)}{4eH}\right) \quad (17)$$

$$I_x(x,a)=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{2\pi T}{v}\right)^3\int\frac{d\Omega}{z}\int_0^\infty dx_1\int_0^\infty dx_2\ A(x_1,x_2:x,a) \quad (18)$$

$$I_y(x,a)=\frac{3}{4\pi}\left(\frac{2\pi T}{v}\right)^3\int\frac{i\alpha d\Omega}{z}\int_0^\infty dx_1\int_0^\infty dx_2\ A(x_1,x_2:x,a) \quad (19)$$

$$A(x_1,x_2:x,a)=\left\{\sinh\left(\frac{2\pi T}{vz}|x_1+x_2|\right)\right\}^{-1}$$

$$\times\exp\left[-eH\{(1-i\alpha)(x_1^2+2x_1[x+a])+(1+i\alpha)(x_2^2+2x_2[a-x])\}\right] \quad (20)$$

$$z=\cos\theta \quad , \quad \alpha=\tan\theta\cos\varphi$$

となる。上の表式から連続の方程式 $\partial\,\partial x/\partial x+\partial\,\partial y/\partial y=0$ が成立していることがすぐ分る。それ故、Maxwell 方程式は直ちに積分出来て

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}=H=H_0-\frac{eN}{m(2\pi T)^2}\sum_{n,m}C_n\psi_n C_m^+\psi_m^+$$

$$\times J\left[x+\frac{k(n+m)}{4eH},\ \frac{k(n-m)}{4eH}\right] \quad (21)$$

となる。或いは、小さなnonlocal 効果を無視すると(高々 a few パーセントのエラーしかないことを示すことが出来る)

$$H=H_0-\frac{6\pi eN}{m(2\pi T)^2}\,g(\rho)\,|\Delta|^2 \quad (22)$$

$$J(x,a)=\int_{-\infty}^{x}I_y(x,a)\,dx \quad (23)$$

$$g(\rho)=\frac{d f_0(\rho)}{d\rho} \quad (24)$$

となる。

(22)によつて与えられるinduced field による磁場の変化を考慮して、(1)を解くと、この効果と(1)の右辺の第2項とが同程度の寄与をするので、

$$\frac{e\,v^2}{(2\pi T)^2}(H_{c2}-H_0)\,g(\rho)\,\overline{|\varDelta|^2}+\frac{1}{2(2\pi T)^2}\left[\frac{4\pi N}{3m}\left(\frac{3ev}{2\pi T}\,g(\rho)\right)^2\right.$$
$$\left.-\,f_1(\rho)\right]\overline{|\varDelta|^4}=0 \tag{25}$$

をうる。ここで $\overline{|\varDelta|^2}$ 等は空間的平均を意味する。又

$$f_1(\rho)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\Omega}{z^3}\int_0^\infty\frac{t^2dt}{\sinh(\frac{t}{z})}\int_0^1 du\int_0^v dv\; e^{-\rho t^2 \varLambda(u,v;\alpha)} \tag{26}$$

$$\varLambda(u,v;\alpha)=\frac{(1-u)^2+v^2}{2}-i\alpha\frac{(1-u)^2-v^2}{2}+\frac{1+\alpha^2}{4} \tag{27}$$

である。 $f_1(\rho)$ の漸近形は local 近似で

$$f_1(\rho)=7\zeta(3)-\frac{62}{3}\zeta(5)\rho+\frac{2159}{24}\zeta(7)\rho^2\cdots\quad \text{for}\quad \rho\ll 1 \tag{28}$$

$$=4\rho^{-1}[\{\ell n(1+\sqrt{2})\}^2\ell n(24\gamma\rho)+\mathrm{const}]+O(\rho^{-2})$$
$$\text{for}\quad \rho\gg 1 \tag{29}$$

となる。(25)を用いれば、磁束密度 B は

$$B=\overline{H}=H_0\doteq\frac{6\pi eN}{m(2\pi T)^2}\,g(\rho)\,\overline{|\varDelta|^2}$$
$$=H_0-\frac{H_{c2}-H_0}{\{2\kappa_2^2(T)-1\}\beta} \tag{30}$$

となる。従つて、自由エネルギーは

$$\varDelta F_{sH}\equiv F_{sH}-F_{s,0}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[B^2-\frac{(H_{c2}-B)^2}{\{2\kappa_2^2(T)-1\}\beta+1}\right] \tag{31}$$

となる。(31)から分るように、自由エネルギーは、β が極小のとき、最大となる。論文 6)によれば、磁場の強さが極大となる点が、equilateral triangular lattice を形づくつているとき β が極小で、$\beta=1.159$ で与えられることが分る。又 $\kappa_2(T)$ は

$$\kappa_2(T) = \left[\frac{3m\, f_1(\rho)}{8\pi N}\right]^{1/2} \cdot \left[\frac{3ev}{2\pi T}\, g(\rho)\right]^{-1} \tag{32}$$

で与えられる。$\kappa_2(T)$の漸近形は、(7), (8), (24), (28), (29)を用いて

$$\kappa_2(T) = \frac{2e}{3}\ell n(1+\sqrt{2})\sqrt{\frac{7\zeta(3)}{\gamma}}\,\kappa\left[\ell n\frac{T_{C2}}{T}\right]^{1/2}$$

$$= 3.48\ \kappa(\ell n\, T_{C0}/T)^{1/2} \qquad \text{for} \quad T \ll T_{C0} \tag{33}$$

$$= \kappa(1+4.63\,\theta) \qquad \text{for} \quad T_{C0}-T \ll T_{C0} \tag{34}$$

で与えられる。

$\kappa_2(T)$は温度が降ると共に急速に増大し、絶対零度では$(\ell n\, T_{C0}/T)^{1/2}$のように発散することが分る。(32), (33), (34)から一般の温度に対する$\kappa_2(T)$の温度依存性はinterpolation formula

$$\kappa_2(T) = \kappa\left[1+12\ \ell n\frac{T_{C0}}{T}\right]^{1/2} \tag{35}$$

で表わされる。

最近、純粋なNbの転移点における比熱の「とび」をMc Conville と Serin[7]が測定したが、それによると、$\kappa_2(T)$は温度が降ると共に急速に増加することを示している。

4　以上の結果から次のようなことが結論される。唯一つのパラメータκの代りに、2つのパラメータκ_1とκ_2を導入すれば、Abrikosov's pictureはかなり広い応用領域をもつている。Maki による結果と合せ考えれば、純粋な超電導体でも、合金の場合でも、2つのパラメータκ_1, κ_2を用いてAbrikosovの構造は完全に特長ずけられる。しかしながら、pure limit と dirty limit では著しい違いがある。即ち関係

$$\begin{aligned} &\kappa_2(T) \geq \kappa_1(T) \geq \kappa && \text{for pure limit} \\ &\kappa_1(T) \geq \kappa \geq \kappa_2(T) && \text{for dirty limit} \end{aligned} \tag{36}$$

が成立することに、その点が現われている。（等号は転移点で成立）$\kappa_1(T)/\kappa$ の温度変化及びその値は、不純物の密度にあまり依存しないが、$\kappa_2(T)/\kappa$ は非常に強く依存する。しかも、温度が降ると、dirty limit では κ_2/κ は単調に減少し、$T=0°K$ では有限の値をもつのに反し、pure limit では、温度が降ると共に増大し（急速に）、$T=0°K$ では $[\ell n(T_{C0}/T)]^{1/2}$ のように発散する。この相違は、素励起のスペクトラムの相違により説明される様に思われる。即ち、不純物密度が十分大きいときには、磁場の効果は、Gapless superconductivity として説明されるが、pure な場合には、磁場の強さが H_{C2} より少しでも小さくなると、素励起はエネルギー・ギヤップをもつ。

Intrinsic London (Type II) 型超電導体は、第二種の相転移をする。合金の場合のように「第三種」相転移をする可能性はない。

以上のことから、London 型（Type II）超電導体の磁気的性質はかなり明らかになつたと思われる。pure limit と dirty limit との結果は限界値を与えると考えられる。

最後に、G−L approch（自由エネルギーを $|\Delta|^2$ で展開する方法）の有効性について少し議論しておこう。subcritical region では Δ は小さいのでそのような展開が可能とすれば

$$\Delta F = a\overline{|\Delta|^2} + b\overline{|\Delta|^4} + c\overline{|\Delta|^6} + \cdots \tag{37}$$

しかしながら、pure metal では係数 b は低温で $\ell n\, T_{C0}/T$ のように発散する。係数 c について調べてもやはり発散する。従つて、絶対零度の近くで ΔE の正しい表式をうるためには most diverging terms を sum up しなければならない。これは実際に可能で、例えば $T=0°K$ では

$$\Delta F = a\overline{|\Delta|^2} + b'\,\ell n\left(\frac{C\,T_{C0}^2}{|\Delta|^2}\right)\overline{|\Delta|^4} \tag{38}$$

となることが分る。このことは、形式的な展開 (37) が、絶対零度の近くでだめになることを示している。（合金の場合には (37) は常に成立する）[4),8)]

最後に、この仕事について種々御討論下さいました松原先生・碓井先生にお礼申し上げます。

参　考　文　献

1) V.L. Ginzburg, L.D. Landau : JETP 20 1064 (1950)

2) A.A. Abrikosov : JETP 32 1442 (1957) : Soviet Phys.—JETP 5 1174 (1957)

3) K. Maki : Physics 1 21 (1964)

4) L.P. Gor'kov : J.E.T.P. 36 1918 (1959) ; 37, 1407 (1959) ; Soviet Phys.—J.E.T.P. 9 1364 (1959) ; 10 998 (1960)

5) L.P. Gor'kov : J.E.T.P. 37 835 (1959) ; Soviet Phys.— J.E.T.P. 10 593 (1960)

6) W.H. Kleiner, L.M. Roth, S.H. Autler : Phys. Rev. 133 A1226 (1964)

7) T. McConville, B. Serini : Phys. Rev. Letters. 13 365 (1964)

8) P.G. de Gennes : to be publhshed.